Wiskunde 4 27-08-'02

Tentamenopgave[1]

I

Voor welke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zijn de volgende reeksen convergent ? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^\beta x}$. Hoe toon je dit aan ?

II

1. Formuleer de gedomineerde convertentie stelling van Lebesgue.

2. Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ integreerbaar. Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-n|x|} f(x)dx = 0$.

3. Laat nu $\alpha < \beta$ en neem aan dat voor $t \in (\alpha, \beta)$ de functie $x \mapsto f(t, x)$ integreerbaar is over (a, b). Zij

$$F(t) = \int_a^b f(t,x)dx, \quad \alpha < t < \beta.$$

Geef voorwaarden waaronder F differentieerbaar is en

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx, \quad \alpha < t < \beta.$$

(differentiatie onder het integraalteken).

4. Toon aan dat, voor $n \in \mathbb{N}$ en $\alpha > 0$,

$$\int_1^\infty x^n e^{-\alpha x} dx < +\infty$$

Aanwijzing: Gebruik de schatting $\alpha^{n+2} x^{n+2} \leq (n+2)! e^{\alpha x}$.

5. Gegeven $\int_0^{+\infty} e^{-tx}dx = \frac{1}{t}$, $t > 0$, bepaal, voor $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-tx}dx$ door herhaaldelijk onder het integraalteken te differentiëren. Aanwijzing: Beperk t eerst tot $t > \alpha > 0$.

III

1. Formuleer de stelling van Dirichlet over Fourierreeksen.

2. Toon aan dat voor $|x| < \pi$

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \tag{1}$$

Aanwijzing: citeer de relevante stelling en bereken de Fouriercoëfficienten.

3. Is de convergentie van deze reeks uniform ?

4. Geef de formule van Parseval, liefst in termen van de reële Fouriercoëfficienten.

5. Bereken met behulp hiervan de som van de reeks $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

IV

1. Geef de formules van Plancherel voor de Fouriertransformatie en voorwaarden waaronder deze geldig zijn.

2. Bereken met behulp hiervan de integraal bij $a > 0$ en $b > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin ax}{ax} \frac{\sin bx}{bx} dx. \tag{2}$$

[1]De onderdelen I, II, III en IV zijn onafhankelijk.